

Стаття відправлена: 26.05.2025 г.

© Бондарчук О.Ю.

<https://www.proconference.org/index.php/usc/article/view/usc31-00-004>

DOI: 10.30888/2709-2267.2025-31-00-004

UDC 512.543

ON SERIES OF GENERATORS SYSTEMS FOR AUTOMATON PERMUTATION GROUPS

ПРО СЕРІЇ СИСТЕМ ТВІРНИХ ГРУП АВТОМАТНИХ ПІДСТАНОВОК

Sikora V.S. / Сікора В.С.

candidate of ph.-math..sc., associated professor / к.ф.-м.н., доц.

ORCID: 0000-0002-5283-8759

Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, Ukraine,

Chernivtsi, vul. Universytetska, 28, 58000

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Україна,

Чернівці, вул. Університетська, 28, 58000

Анотація. У статті досліджується питання побудови систем твірних груп автоматних підстановок, які діють на множині всіх слів над даним алфавітом або на множині слів довжини r ($r \in \mathbb{N}$) над цим алфавітом. Встановлено, що група, індукована автоматними підстановками на множині слів довжини r , має мінімальну базу, яка складається рівно з r елементів. Наведено нові серії систем твірних груп автоматних підстановок.

Ключові слова: система твірних, група автоматних підстановок, скінченні автоматні підстановки, незвідні системи твірних.

Abstract. The article investigates the construction of generators systems for automaton permutation groups that act on the set of all words over a given alphabet or on the set of words of length r ($r \in \mathbb{N}$) over this alphabet. It is established that the group induced by automaton permutations on the set of words of length r has a minimal base consisting of exactly r elements. A new series of systems for generators groups of automaton permutations is presented.

Key words: system of generators, automaton permutation groups, finite automaton permutations, irreducible systems of generators.

Вступ.

Деякі початкові відомості про групи всіх автоматних підстановок над заданим алфавітом можна знайти в роботах [1–4]. Зокрема, в [3] встановлено, що їх можна конструювати зі симетричних груп, використовуючи операцію вінцевого добутку, тобто при вивченні груп автоматних підстановок можна застосовувати добре розвинену теорію вінцевих добутків.

Об'єктом дослідження даної праці, яка продовжує дослідження робіт [7, 9, 10], є питання побудови системи твірних для групи фінітних автоматних підстановок.

Постановка задачі. Допоміжні твердження. Нехай задано два автомати

$$A_1 = \langle Q_1, X_1, Y_1, \delta_1, \lambda_1 \rangle, A_2 = \langle Q_2, X_2, Y_2, \delta_2, \lambda_2 \rangle$$

такі, що вхідний алфавіт другого з цих автоматів збігається з вихідним алфавітом першого (тобто, що $X_2 = Y_1$). Наведемо означення, леми та теореми з робіт [7, 9, 10], які знадобляться нам для подальших досліджень.

Означення 1 [2]. Суперпозицією $A_1 \cdot A_2$ автоматів A_1 та A_2 називається автомат $B = \langle Q, X_1, Y_2, \delta, \lambda \rangle$, множина станів Q якого збігається з добутком $Q_2 \times Q_1$ множин станів автоматів A_1 та A_2 . При цьому для довільного стану $q = (q_2, q_1) \in Q$ та довільного вхідного сигналу $x \in X_1$ автомата B значення функцій переходів та виходів автомата B визначаються зі співвідношень:

$$\delta(q, x) = (\delta_2(q_2, \lambda_1(q_1, x)), \delta_1(q_1, x)), \lambda(q, x) = \lambda_2(q_2, \lambda_1(q_1, x)). \quad (1)$$

Лема 1 [6]. Добуток автоматних відображень є автоматним відображенням. Обернене до бієктивного автоматного відображення також є автоматним.

Таким чином, всі автоматні бієктивні відображення над алфавітом X утворюють групу, яку називають *групою автоматних підстановок* над алфавітом X і позначають $A(X)$. Згідно з вищенаведеним, маємо

$$A(X) \simeq \text{Aut } T(X),$$

де символом $\text{Aut } T(X)$ позначено групу автоморфізмів дерева $T(X)$.

Означення 2 [5]. Перетворення $f : X^* \rightarrow X^*$ називається *фінітарним*, якщо існує таке натуральне число m , що для довільного слова $\omega \in X^*$ його образ $f(\omega)$ відрізняється від ω не більше, ніж першими m літерами.

Лема 2 [5]. Кожне фінітарне перетворення є скінченно автоматним. Усі фінітарні перетворення утворюють підгрупу в групі $K(X)$ всіх скінченно автоматних підстановок, яку позначають $F(X)$.

Нехай $X^{(r)}$ — підмножина X^* , яка складається зі слів довжини точно r . Згідно з лемою 1.9 з [8], ця підмножина є інваріантною відносно перетворення $A(X)$, тобто можна розглянути групу перетворень $(A(X), X^{(r)})$. Якщо J_r — ядро цього перетворення, то фактор-група $A^{(r)}(X) = A(X) / J_r$ діє на $X^{(r)}$ точно.

Аналогічно, фактор-групи

$$K^{(r)}(X) = K(X) / J_r \cap K(X), F^{(r)}(X) = F(X) / J_r \cap F(X)$$

також діють точно на $X^{(r)}$.

Лема 3 [9]. Для довільного $r \in \mathbb{N}$ мають місце рівності

$$K^{(r)}(X) = F^{(r)}(X) = A^{(r)}(X).$$

Далі, для довільного $r \in \mathbb{N}$ можна визначити природну проєкцію (епіморфізм) $\varphi_r : A^{(r+1)}(X) \rightarrow A^{(r)}(X)$, та природний мономорфізм $\psi_r : A^{(r)}(X) \rightarrow A^{(r+1)}(X)$. Тим самим задано два спектри груп: прямий $(A^{(r)}(X); \psi_r)_{r \in \mathbb{N}}$, та обернений $(A^{(r)}(X); \varphi_r)_{r \in \mathbb{N}}$. Отже, можна говорити про х граничні групи (означення див. [10]).

Лема 4 [9]. Мають місце такі співвідношення:

$$(i) \lim_{\rightarrow} (A^{(r)}(X), \psi_r) \simeq F(X);$$

$$(ii) \lim_{\leftarrow} (A^{(r)}(X), \varphi_r) \simeq A(X).$$

Лема 5 [9]. Для довільного $r \in \mathbb{N}$ група $(A^{(r)}(X), X^{(r)})$, $\text{card}(X) = n$, ізоморфна (як група перетворень) r -му вінцевому степеню симетричної групи $S(X)$. Група $(A(X), X^*)$, $\text{card}(X) = n$, ізоморфна (як група перетворень) вінцевому степеню $\bigcup_{i=1}^{\infty} S(X)^{(i)}$ нескінченної послідовності симетричних груп степеня n в його інтранзитивній реалізації. Група $(K(X), X^*)$, $\text{card}(X) = n$, ізоморфна (як група перетворень) обмеженому вінцевому степеню $(b) \bigcup_{i=1}^{\infty} S(X)^{(i)}$ в його інтранзитивній реалізації. Група $(F(X), X^*)$, $\text{card}(X) = n$, ізоморфна (як група перетворень) фінітарному вінцевому добутку $(F) \bigcup_{i=1}^{\infty} S(X)^{(i)}$.

На групі $A(X)$ природно вводиться метрика (див. [4, 6]). А саме, якщо перетворення з $A(X)$ задаються таблицями, то відстань між ними дорівнює η^k , де η , $(0 < \eta < 1)$ — фіксоване число, а k — довжина спільного початку таблиць. Тим самим група $A(X)$ перетворюється в метричну групу і є повним метричним

простором.

Лема 6 [9]. Підгрупа $F(X)$ є всюди щільною в підгрупі $A(X)$.

Згідно з лемою 4, група $A^{(r)}(X)$ ізоморфна вінцевому добутку r симетричних груп степеня n ($n = (X)$): $A^{(r)}(X) \simeq \underbrace{S_n \wr S_n \wr \dots \wr S_n}_r =: S(n, r)$.

Отже, $A^{(r)}(X)$ має степінь n^r і порядок $(n!)^{1+n+n^2+\dots+n^{r-1}}$, при цьому діє на множині слів довжини r транзитивно та імпримітивно. Для кожного цілого k ($1 \leq k \leq r$) група $A^{(r)}(X)$ містить підгрупу k -координатних таблиць, тобто таблиць вигляду $[\varepsilon, \dots, \varepsilon, g_k(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}), \varepsilon, \dots, \varepsilon]$, яка ізоморфна n^{k-1} -му степеню симетричної групи S_n .

Розглянемо спочатку системи твірних групи $A^{(r)}(X)$, які складаються лише з координатних таблиць. Для цього в симетричній групі S_n фіксуємо деяку систему твірних $\Pi = \{\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_s\}$ і розглянемо таблиці вигляду

$$u_r(\bar{x}_{k-1}^{0,l}, k, \pi_l) = [\varepsilon, \dots, \varepsilon, h_{k,l}(x_1, \dots, x_{k-1}), \varepsilon, \dots, \varepsilon], \quad (2)$$

в яких

$$h_{k,l}(x_1, \dots, x_{k-1}) = \begin{cases} \pi_l, & \text{якщо } (x_1, \dots, x_{k-1}) = \bar{x}_{k-1}^{0,l}, \\ \varepsilon & \text{у решті випадків,} \end{cases} \quad (3)$$

де ε – одиничний елемент групи S_n , $\bar{x}_{k-1}^{0,l} = (x_{1,l}^0, \dots, x_{k-1,l}^0)$ — фіксований кортеж, $l = 1, 2, \dots, s$, $k = 1, 2, \dots, r$.

Теорема 1 [9]. Система елементів, визначених формулами (2) та (3), є системою твірних групи $S(n, r)$ при довільному виборі кортежів $\bar{x}_k^{0,l}$ ($1 \leq k \leq r-1$, $1 \leq l \leq s$). Ця система буде незвідною тоді й тільки тоді, коли система Π буде незвідною.

Оскільки симетрична група S_n породжується двома підстановками – такими, наприклад, будуть пари $(1, 2)$, $(1, 2, \dots, n)$ або $(1, 2, \dots, n-1)$, $(1, 2, \dots, n)$ – то група $S(n, r)$, а отже і $A^{(r)}(X)$, має незвідні системи твірних вигляду (2), які містять $2r$ підстановок.

Нагадаємо, що комутатор елементів a, b групи G визначається як $(a, b) = a \cdot b \cdot a^{-1} \cdot b^{-1}$, а підгрупа, породжена всіма комутаторами, називається *комутантом* G і позначається G' . Оскільки група G' є найменшою за включенням підгрупою такою, що фактор-група G/G' — абелева, то цю останню називають *абелізацією* групи G [7, 8]. Зокрема, комутантом симетричної групи S_n є знакозмінна група A_n , тобто абелізацією S_n буде циклічна група другого порядку. Для того, щоб описати абелізацію групи $S(n, r)$, охарактеризуємо спочатку комутант цієї групи. Нехай $\sigma = \prod f(\bar{x}_r)$ — добуток всіх значень деякої координатної функції, взятих у певному порядку. Підстановка σ є або парною, або непарною і ця властивість не залежить від порядку множників. Із означення оператора $\prod$ випливає:

- (i) якщо $\prod f(\bar{x}_r) \in A_n$, то для довільної таблиці $u \in S(n, r)$ маємо $\prod f(\bar{x}_r^u) \in A_n$;
- (ii) якщо $\prod f(\bar{x}_r) \in A_n$ та $\prod g(\bar{x}_r) \in A_n$, то $\prod f(\bar{x}_r)g(\bar{x}_r) \in A_n$, де A_n — знакозмінна група порядку n .

Теорема 2 [9]. *Комутант $S'(n, r)$ містить ті й тільки ті таблиці $[g_1, g_2(x_1), \dots, g_r(\bar{x}_{r-1})]$, для яких виконується співвідношення: $g_1 \in A_n$, $\prod g_i(\bar{x}_{i-1}) \in A_n$ ($1 \leq i \leq r$).*

Теорема 3 [10]. *Кожна мінімальна (за кількістю елементів) система твірних групи $S(n, r)$ для довільного $r \geq 2$ містить рівно r елементів.*

Теорема 3 допускає природне узагальнення на випадок довільних метасиметричних груп скінченного рангу. А саме, має місце таке твердження.

Теорема 4 [10]. *Кожна мінімальна (за кількістю елементів) система твірних метасиметричної групи $S(n_1, n_2, \dots, n_r)$ ($n_i \geq 2$ для $i = 1, 2, \dots, r$) довільного скінченного рангу $r \geq 2$ містить рівно r елементів.*

Основний результат.

При виконанні умов доведених у роботах [7, 9, 10] лем 1–6 та теорем 1–4, можна довести наступні твердження.

Лема 7. Для довільного $r \in \mathbb{N}$ група $A^{(r)}(X)$, індукована групою автоматних перетворень на множині слів довжини r , має мінімальні (за кількістю елементів) системи твірних, які містять точно r елементів.

Доведені раніше твердження дають змогу навести коректне доведення нескінченно породжуваності групи автоматних підстановок.

Теорема 5. Групи $K(X), F(X)$ не є скінченно породженими. Група $A(X)$ не є скінченно породженою навіть у топологічному розумінні.

Одна з незвідних систем твірних групи всіх фінітарних автоматних перетворень була побудована раніше (див. [4]). Вона є незвідною в топологічному розумінні в групах $A(X)$ та $K(X)$. Доведені нами вище теореми 1, 3 і 4 дозволяють будувати цілі сім'ї таких систем.

Далі символом $\tilde{y}(k, \bar{x}_{k-1}^{0,l}, \pi_l)$ позначимо нескінченну таблицю, яка є продовженням таблиці (1) за допомогою дописування в її кінець нескінченної кількості одиничних координат. Перетворення, що визначається цією таблицею, діє на слова з X^* таким чином:

1) в образі $\tilde{y}$ слова $y = y_1 y_2 \dots y_s$ може змінюватися тільки k -та літера (зокрема, слова довжини, меншої за k , не змінюються);

2) k -та літера образу $\tilde{y}$ слова y відрізняється від y_k тільки в тому випадку, коли $y_i = x_{i,l}^0$, $1 \leq i \leq k-1$;

3) в останньому випадку, k -та літера образу $\tilde{y}_k$ слова y визначається рівністю $\tilde{y}_k = y_k^{\pi_l}$.

Легко конструюється автомат $A(k, \bar{x}_{k-1}^{0,l}, \pi_l)$, що визначає таке перетворення. Нехай $\Pi = \{\pi_1 \dots \pi_s\}$ — незвідна система твірних групи S_n , і для довільного $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, фіксовано деякий набір $\Delta_{s,k-1}$, який складається з s не обов'язково різних кортежів довжини $k-1$ над алфавітом X .

Теорема 6. Система автоматних підстановок, визначених автоматами вигляду $A(k, \bar{x}_{k-1}^{0,l}, \pi_l)$ ($\bar{x}_{k-1}^{0,l} \in \Delta_{s,k-1}; \pi_l \in \Pi, 1 \leq l \leq s, k \in \mathbb{N}$), є незвідною системою

твірних групи всіх фінітарних автоматних перетворень $F(X)$ і системою твірних групи $A(X)$ (або $K(X)$) в топологічному розумінні.

Побудована в [4] система перетворень є системою твірних в топологічному розумінні і для групи $K(X)$. Однак, оскільки група всіх скінченно автоматних перетворень є зліченною, вона містить зліченні системи твірних в алгебраїчному розумінні.

Висновки.

У даній праці результати [7, 9, 10] застосовано для дослідження систем твірних груп автоматних підстановок, які діють на множині всіх слів над даним алфавітом або на множині слів довжини r ($r \in \mathbb{N}$) над цим алфавітом. У результаті досліджень встановлено, що група, індукована автоматними підстановками на множині слів довжини r , має мінімальну базу, яка складається рівно з r елементів. Наведено нові серії систем твірних груп автоматних підстановок. Результати, одержані в роботі, можна застосувати для подальшого дослідження груп, індукованих автоматними підстановками на множині слів довжини r , а також нових серій систем твірних груп автоматних підстановок.

Література:

1. Hall Marshall Jr. The Theory of Groups.— AMS Chelsea Publishing, 1976.— 434 p.
2. Глушков В.М. Абстрактная теория автоматов // Успехи мат. наук.— 1961.— 16, №5.— С.3–63.
3. Заровный В.П. Автоматные подстановки и сплетения групп // Кибернетика.— 1965.—№1.— С.29–36.
4. Чакань Б., Гечег Ф. О группе автоматных подстановок // Кибернетика.— 1965.—№1.— С.29–36.
5. Суцанський В.І. Групи автоматних підстановок // Доповіді НАН України.— 1998.—№6.— С.47–50.
6. Chillag D., Herzog M., Mann A. On the Diameter of a Graph Related to Conjugacy Classes of Groups // Bull. London Math.Soc.— 1993.— Vol.25.— P.255–262.

7. Sikora V.S., Sushchanskii V.I. Systems of generators of automaton permutations groups // *Cybernetics and Systems Analysis*.– 2000.– Vol.36.– P.415–425.– <https://doi.org/10.1007/BF02732992>

8. Сікора В.С. Мінімальні системи твірних скінченних гіпероктаедральних, мономіальних, метасиметричних та автоматних груп підстановок. Монографія.– Чернівці: Технодрук, 2018.– 168 с.

9. Sikora V.S. Minimal Generators Systems for Groups of Automatic Permutations // *International Scientific Periodical Journal "SWorldJournal"*.– 2021.– Issue 7, Part 2.– P.48-55.– Published by: SWorld & D.A. Tsenov Academy of Economics – Svishtov, Bulgaria.– DOI: 10.30888/2663-5712.2021-07-02-014.

10. Sikora V.S. On Systems Of Generators Of Automaton Permutation Groups // *International Scientific Periodical Journal "SWorldJournal"*.– 2022.– Issue 11, Part 2.– P.38–44.– Published by Academy of Economics named after D.A. Tsenov jointly with SWorld.– Svishtov, Bulgaria.– DOI: 10.30888/2663-5712.2022-11-02-006.

Тези відправлено: 06.05.2025 г.

© Сікора В.С.